OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală, Braşov, februarie 2010
Clasa a X-a
Soluţii şi bareme

SUBIECTUL I

1. Aplicând inegalitatea dintre media aritmetică şi media geometrică, avem:

$$\frac{\underbrace{a+a+...+a}_{b\ ori}+\underbrace{b+b+...+b}_{c\ ori}+\underbrace{c+c+...+c}_{a\ ori}}{a+b+c} \geq \sqrt[a+b+c]{a^b b^c c^a}.....3p$$

2. Utilizând monotonia funţiei logaritmice pentru $a, b, c \geq 2$ şi inegalitatea de la punctul 1., se obţine $\log_a \frac{ab+bc+ca}{a+b+c} \geq \log_a \sqrt[a+b+c]{a^b b^c c^a}$, $\log_b \frac{ab+bc+ca}{a+b+c} \geq \log_b \sqrt[a+b+c]{a^b b^c c^a}$, $\log_c \frac{ab+bc+ca}{a+b+c} \geq \log_c \sqrt[a+b+c]{a^b b^c c^a}$.............1p
   Însumând aceste inegalităţi, se obţine:

$$\log_a \frac{ab+bc+ca}{a+b+c} + \log_b \frac{ab+bc+ca}{a+b+c} + \log_c \frac{ab+bc+ca}{a+b+c} \geq \frac{1}{a+b+c} \cdot$$
$$\cdot \quad \left[(a+b+c) + (a\log_a c + c\log_c b + b\log_b a) + (c\log_a b + a\log_b c + b\log_c a)\right]$$

   Aplicând din nou inegalitatea dintre media aritmetică şi media geometrică, avem:

$$\frac{a\log_a c + c\log_c b + b\log_b a}{a+b+c} \geq \sqrt[a+b+c]{\log_a c \log_c b \log_b a} = 1,$$

   deci, $a\log_a c + c\log_c b + b\log_b a \geq a+b+c$.
   Analog, $c\log_a b + a\log_b c + b\log_c a \geq a+b+c$, iar de aici rezultă $\log_a \frac{ab+bc+ca}{a+b+c} + \log_b \frac{ab+bc+ca}{a+b+c} + \log_c \frac{ab+bc+ca}{a+b+c} \geq 3$.....3p

SUBIECTUL II

1. Se observă $f(x) = \begin{cases} x^2-2x+2, & x \leq 1 \\ 1-\sqrt{x}, & x > 1 \end{cases}$ pentru că $f_1(t) = t^2-2t+2$ este strict descrescătoare pe $(-\infty, 1]$ şi $f_2(t) = 1-\sqrt{t}$ este strict de-

screscătoare pe $(1,\infty)$. Deci, $f(\mathbf{R})=(-\infty,0)\cup[1,\infty)$, iar f nu e surjectivă. Funţia f este strict descrescătoare pe ramuri, $f\big((-\infty,1]\big)=[1,\infty)$, $f\big((1,\infty)\big)=(-\infty,0)$, deci f injectivă.....2p

2. Se analizează cazurile:
1) $k>-1$; $g(\mathbf{R})=(-\infty,0)\cup[k+1,\infty)$ şi $1+k>0$, deci, g nu e surjectivă
2) $k<-1$; $g(\mathbf{R})=(-\infty,0)\cup[k+1,\infty)$ şi $1+k<0$, deci g nu e injectivă
3) $k=-1$; $1+k<0$; $g(\mathbf{R})=\mathbf{R}$ deci g surjectivă şi $g\big((-\infty,1]\big)=[0,\infty)$, $g\big((1,\infty)\big)=(-\infty,0)$, deci g injectivă. Astfel, g bijectivă.....3p

3. $g^{-1}:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$, $g(x)=\begin{cases} f(x)-1, & x\le 1\\ f(x), & x>1\end{cases}$ $\quad y=g(x)$;
1) $y=(x-1)^2$, $x=1-\sqrt{y}$
2) $y=1-\sqrt{x}$, $x=(1-y)^2$.
Deci $g^{-1}(x)=\begin{cases} 1-\sqrt{x}, & x\ge 0\\ (1-x)^2, & x<0\end{cases}$ ......$2p$

SUBIECTUL III
Presupunem că există $z_1,z_2,z_3\in\mathbf{C}^*$ astfel încât:

$$3=|3i|=\left|\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}\right|\le\left|\frac{z_1}{z_2}\right|+\left|\frac{z_2}{z_3}\right|+\left|\frac{z_3}{z_1}\right|\le 3\sqrt[3]{\frac{|z_1|}{|z_2|}\frac{|z_2|}{|z_3|}\frac{|z_3|}{|z_1|}}=3$$

Deci, $|z_1|=|z_2|=|z_3|=r$........2p
Vom avea: $z_k=r(\cos t_k+i\sin t_k)$, $k=1,2,3$.
Atunci:

$$\cos(t_1-t_2)+\cos(t_2-t_3)+\cos(t_3-t_1)+i[\sin(t_1-t_2)+\sin(t_2-t_3)+\sin(t_3-t_1)]=3i,$$

de unde

$$\cos(t_1-t_2)+\cos(t_2-t_3)+\cos(t_3-t_1)=0,$$
$$\sin(t_1-t_2)+\sin(t_2-t_3)+\sin(t_3-t_1)=3.$$

Din cea de a doua relaţie avem $\sin(t_1-t_2)=\sin(t_2-t_3)=\sin(t_3-t_1)=1$, iar de aici,

$$\begin{aligned} t_1-t_2 &= (-1)^k\frac{\pi}{2}+k\pi, \quad k\in\mathbf{Z}\\ t_2-t_3 &= (-1)^p\frac{\pi}{2}+p\pi, \quad p\in\mathbf{Z}\\ t_3-t_1 &= (-1)^q\frac{\pi}{2}+q\pi, \quad q\in\mathbf{Z}..........3p\end{aligned}$$

Adunând aceste relaţii, obţinem:

$$0=[(-1)^k+(-1)^p+(-1)^q]\frac{\pi}{2}+(p+k+q)\pi$$

sau

$$\frac{(-1)^k + (-1)^p + (-1)^q}{2} + p + q + k = 0,$$

imposibil deoarece $(-1)^k + (-1)^p + (-1)^q$ este impar şi $\frac{(-1)^k+(-1)^p+(-1)^q}{2}$ nu este număr intreg......2p

Presupunerea făcută este falsă, deci nu există $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}^*$ cu proprietatea cerută.

SUBIECTUL IV

În demonstraţie vom folosi observaţiile evidente $2^{3k} = \mathcal{M}_7 + 1$, $2^{3k+1} = \mathcal{M}_7 + 2$, $2^{3k+2} = \mathcal{M}_7 + 4$, $\forall k \in \mathbf{N}$......1p

Vom ţine cont că $131023 = 7 \cdot 18717 + 4$, iar restul împărţirii unui pătrat perfect la 7 nu poate fi decât 0, 1, 2 sau 4. ....2p

Evident că $q = 3k$ nu poate fi soluţie a problemei.....1p

Dacă $q = 3k+1$, atunci $p^2 = 2^q - 131023 = \mathcal{M}_7 + 2 - 4 = \mathcal{M}_7 + 5$, imposibil......1p

Dacă $q = 3k + 2$, atunci $p^2 = 2^q - 131023 = \mathcal{M}_7 + 4 - 4 = \mathcal{M}_7$. Deci, p este multiplu de 7. Dar p nr prim, rezultă $p = 7$. Astfel, $2^q = 131023 + 49$, deci $q = 17$.......2p